Correction des exercices du rappel de cours

EXERCICE 1.2.

1.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k\right)dx &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\int_0^1 x^k dx\right) \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left[\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right]_0^1\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[x^{k+1}\right]_0^1\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(1-0)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}1\\
&= n.
\end{aligned}$$

EXERCICE 1.3 (Etude de suites)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^1 (\ln(1+t)^n dt$.

1. Il suffit d'étudier le signe de la fonction à intégrer $t \mapsto \ln(1+t)^n$ sur $[0;1]$.
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \forall t \in [0;1], \quad 1+t \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+t) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+t)^n \geqslant 0$.
   Ainsi par **positivité de l'intégrale** $\int_0^1 \ln(1+t)^n dt \geqslant 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \geqslant 0$.
2. Pour étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on étudie le signe de la différence $I_{n+1} - I_n$.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \ln(1+t)^{n+1} dt - \int_0^1 \ln(1+t)^n dt\\
&= \int_0^1 \left(\ln(1+t)^{n+1} - \ln(1+t)^n\right) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \int_0^1 \ln(1+t)^n \left(\ln(1+t) - 1\right) dt
\end{aligned}$$

   Etudions maintenant le signe de la fonction à intégrer $t \mapsto \ln(1+t)^n (\ln(1+t)-1)$ sur $[0;1]$.
   D'après ce qui précède, le signe dépend uniquement du signe $\ln(1+t)-1$.
   Or

$$\ln(1+t) - 1 \leqslant 0 \iff 1+t \leqslant e \iff t \leqslant e-1 \approx 1,7 \quad \text{ce qui est toujours vrai sur l'intervalle } [0;1]$$

   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;1] \quad \ln(1+t)^n (\ln(1+t)-1) \leqslant 0$.
   Ainsi par **positivité de l'intégrale** $\int_0^1 \ln(1+t)^n (\ln(1+t)-1)\, dt \leqslant 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   Ccl : La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée (par 0) elle converge en vertu du **théorème de convergence monotone**.

EXERCICE 1.4 (Etude de séries)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, la somme partielle de la série harmonique.

1. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, $\forall k \geqslant 1$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. Ainsi par **croissance de l'intégrale** :
   $\forall k \geqslant 1$, $\underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt}_{=\frac{1}{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt}_{=\frac{1}{k}}$. D'où le résultat : $\forall k \geqslant 1$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces encadrements pour k allant de $1 à n, on a$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt}_{= \int_1^n \frac{1}{t} dt \quad \text{par Chasles}} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{=S_n}.$$

D'où le résultat : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \geqslant \int_1^n \frac{1}{t} dt$.

3. Comme $\int_1^n \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_1^n = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$.
Le résultat précédent nous donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \geqslant \ln(n)$

EXERCICE 1.5. En reprenant la définition de I_n de l'exercice précédent, calculer I_1.

$$I_1 \quad = \quad \int_0^1 \ln(1+t)dt$$

On pose $\begin{cases} u = \ln(1+t) & \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{1+t} \\ v' = 1 & \Rightarrow v = 1+t \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ donc par IPP :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \ln(1+t)dt \\ &= [(1+t)\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 (1+t) \times \frac{1}{1+t}dt \\ &= 2\ln 2 - 1\ln 1 - \int_0^1 1dt \\ &= 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

EXERCICE 1.6. Soit F la fonction définie pour tout $x > 1$ par $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}dt$.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]1;+\infty[$, donc d'après le **théorème fondamental de l'intégration** la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}dt$ est la primitive de f sur $]1;+\infty[$ s'annulant en 2.
En d'autres termes $F' = f$ sur $]1;+\infty[$ et $F(2) = 0$. Par ailleurs par continuité de la fonction f la fonction <u>F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$.</u>
D'après ce qui précède : $\forall x > 1, \quad F'(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, or $x > 1$ implique $\ln(x) > 0$ et donc $F'(x) > 0$.
<u>Ccl :</u> $\boxed{F : x \mapsto \int_2^x \frac{1}{\ln t}dt \text{ est une fonction strictement croissante sur }]1;+\infty[.}$
2. Comme $F(2) = 0$ et que F est croissante sur $]1;+\infty[$ on en déduit que :

x	1		2		$+\infty$
signe de $F(x)$		$-$	0	$+$	

3. En utilisant que pour tout $t > 1$: $\quad \ln t \leqslant t - 1$:
(a) Soit $x \geqslant 2$.
Pour tout $t \in [2, x] \subset [1;+\infty[$, on a $\ln(t) \leqslant t - 1$ donc $f(t) \geqslant \frac{1}{t-1}$.
Ainsi par **croissance de l'intégrale** en intégrant de 2 à x ($x \geqslant 2$), on a : $F(x) = \displaystyle\int_2^x f(t)dt \geqslant \int_2^x \frac{1}{t-1}dt$.
Or $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t-1}dt = [\ln(t-1)]_2^x = \ln(x-1) - \ln(1) = \ln(x-1)$.
<u>Ccl :</u> $\boxed{\forall x \geqslant 2 : \quad F(x) \geqslant \ln(x-1)}$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-1) = +\infty$ donc par comparaison de limites on en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$.
(b) Soit $1 < x \leqslant 2$: $\quad F(x) \leqslant \ln(x-1)$.
Pour tout $t \in [x, 2] \subset [1;+\infty[$, on a $\ln(t) \leqslant t - 1$ donc $f(t) \geqslant \frac{1}{t-1}$.
Ainsi par **croissance de l'intégrale** en intégrant de x à 2 ($2 \geqslant x$), on a : $\displaystyle\int_x^2 f(t)dt \geqslant \int_x^2 \frac{1}{t-1}dt$.
Or
$$\int_x^2 f(t)dt = -\int_2^x f(t)dt = -F(x)$$
et $\displaystyle\int_x^2 \frac{1}{t-1}dt = -{}_2^x\frac{1}{t-1}dt = -\ln(x-1)$.
On obtient donc $-F(x) \geqslant -\ln(x-1)$ et donc $F(x) \leqslant \ln(x-1)$.
<u>Ccl :</u> $\boxed{\forall 1 < x < 2 : \quad F(x) \leqslant \ln(x-1)}$.

On a $\lim_{x\to 1^+} \ln(x-1) = -\infty$ donc par comparaison de limites on en déduit $\boxed{\lim_{x\to 1^+} F(x) = -\infty}$.

(c) D'après les questions précédentes on en déduit le tableau de variation de F :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $F'(x)$	$+$
variations de F	$-\infty \nearrow +\infty$

Remarque : on pourrait en conclure que $F : x \mapsto \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$ réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$!

4. Soit G la fonction définie pour tout $x > 1$ par $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$.

(a) D'après **la relation de Chasles** :

$$G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \underbrace{\int_x^2 \frac{1}{\ln t} dt}_{=-F(x)} + \underbrace{\int_2^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt}_{=F(x^2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{G(x) = F(x^2) - F(x)}.$$

(b) G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ en tant que différence de fonctions elles mêmes de classe $\mathscr{C}^1$.
Remarquons que $x \mapsto F(x^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par composition de la fonction $x \mapsto x^2$ et F toutes deux de classe $\mathscr{C}^1$.
D'après la règle de la dérivée d'une composition on a :

$$\begin{array}{rcl} G'(x) & = & 2xF'(x^2) - F'(x) \\ & = & 2xf(x^2) - f(x) \\ & = & \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} \\ & = & \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} \\ & = & \frac{x-1}{\ln(x)}. \end{array}$$

On a toujours $\ln(x) > 0$ et $x-1 > 0$ sur $]1;+\infty[$ d'où le tableau de variation de G :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $G'(x)$	$+$
variations de G	$\nearrow$

Remarque : on n'a pas déterminé les limites de G aux bornes et ce serait vraiment difficile sans aide supplémentaire !